**ТЕМА 2. Теореми додавання і множення ймовірностей**

**випадкових подій. Умовні ймовірності**

**Теорема додавання ймовірностей несумісних подій**

Нехай події А і В несумісні, причому їх ймовірності відомі.

***Теорема.*** Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Р(А + В) = Р(А) + Р(В).

***Доведення.*** Введемо позначення:

n - загальне число можливих елементарних наслідків експерименту;

m1 - число наслідків, сприятливих А;

m2 - число наслідків, сприятливих В.

Число елементарних наслідків, сприятливих появі або А, або В дорівнює m1 + m2.

Отже, .

Якщо, Аі,  - попарно несумісні події і їх ймовірності відомі Р(Аі), то ймовірність появи однієї із скінченного числа попарнонесумісних подій Аі, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій

.

***Приклад.*** В ящику 10 червоних, 5 синіх і 15 білих деталей. Знайти ймовірність появи кольорової деталі.

***Розв’язування.*** Поява кольорової деталі означає появу або червоної (А), або синьої (В),

; .

А і В несумісні.

С- поява кольорової деталі.

.

***Теорема.*** Сума ймовірностей несумісних подій Аі, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці: .

***Доведення.*** Події Аі утворюють повну групу, тому ймовірність появи хоча б однієї із них є достовірна подія: . Оскількі події Аі несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей , що треба було довести.

***Теорема.*** Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці .

За означенням протилежні події утворюють повну групу, а сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

***Приклад.*** Ймовірність того, що день буде дощовим Р(А) = 0,7. Знайти ймовірність того, що день буде ясним.

***Розв'язування.*** Ці події протилежні, тому ймовірність ясного дня буде дорівнювати .

**Теореми множення ймовірностей**

**Умовна ймовірність**

***Означення.*** Ймовірність події А, що знайдена при умові що подія В відбулася, називається умовною ймовірністю і позначається Р(А/В), або РВ(А); Р(В/А) або РА(В) – умовна ймовірність події В, якщо подія А настала.

***Теорема.*** Ймовірність добутку двох випадкових подій дорівнює добутку ймовірностей однієї із них на умовну ймовірність другої, при умові, що перша вже настала. Р(А . В) = Р(А) . Р(В/А) = Р(В) . Р(А/В).

***Доведення.***  Нехай із загального числа n єдиноможливих, рівноможливих і несумісних випадків події А сприяють m, а події В - сприяють k випадків із m; тоді: ймовірність події А , а умовна ймовірність В .

Добутку подій А і В сприяють k із n випадків ; домножимо і розділимо  на m, тоді .

***Зауваження.*** Ймовірність сумісної появи (добутку) скінченного числа подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх останніх, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події

вже відбулися.

.

***Приклад.*** В урні 2 білі і 3 чорні кулі, із урни виймають дві кулі. Знайти ймовірність, що вони білі.

***Розв'язування.***

А1- поява білої кулі при першому вийманні;

А2- поява білої кулі при другому вийманні;

А- поява двох білих куль.

Р(А) = Р(А1 . А2) = Р(А1) . Р(А2/А1);

; ; .

Якщо розглянути випадок: А1- поява чорної кулі при першому вийманні;

А2- поява білої кулі при другому вийманні. Тоді

і бачимо, що ймовірність другої події змінилась в залежності від того, яка була подія і її ймовірність перед цим. Тому вона називається **умовною.**

**Теорема множення для незалежних подій**

***Означення.*** Подія А називається незалежною від події В, якщо її ймовірність не залежить від події В, тобто умовна ймовірність події А дорівнює її безумовній ймовірності Р(А/В) = Р(А), Р(В/А) = Р(В).

***Теорема.*** Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей

Р(А . В) = Р(А) . Р(В).

***Приклад.*** Знайти ймовірність попадання в ціль двома спортсменами, якщо ймовірність попадання першого (подія А) 0,5, другого (подія В) – 0,8

***Розв'язування.*** Події А і В незалежні, тому Р(А . В) = Р(А) . Р(В) =

=0,5 . 0,8 = 0,4.

***Зауваження.*** Якщо А і В - незалежні події, то незалежні також події

 і , А і , В і .

***Означення.*** Події називаються попарно незалежними, якщо кожні дві з них незалежні.

***Наприклад.*** Події А, В, С попарно незалежні, якщо незалежні події А і В, А і С, В і С.

***Означення.*** Події незалежні в сукупності (просто незалежні) якщо:

а) незалежні кожні дві з них;

б) незалежні кожна подія і всі можливі добутки останніх.

***Приклад.*** Якщо А, В, С незалежні в сукупності, то незалежні А і В, А і С, В і С, А і ВС, В і АС, С і АВ.

***Зауваження.*** Якщо події попарно незалежні, то звідси не випливає їх незалежність в сукупності.

Умова незалежності подій в сукупності сильніша умови їх попарної незалежності.

***Наслідок.*** Ймовірність добутку незалежних в сукупності скінченої множини подій  дорівнює добутку ймовірностей цих подій. , або .

**Ймовірність появи хоча б однієї з подій**

Нехай в результаті випробувань (експерименту) можуть появитись n подій незалежних в сукупності, або декілька з них (зокрема одна, дві і т. д.), причому ймовірності появи кожної з подій відомі.

Як знайти ймовірність того, що появиться хоча б одна з подій. Відповідь дає така теорема.

***Теорема.*** Ймовірність появи хоча б однієї з подій А1, А2, ... Аn, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій , , ... , тобто: .

***Зауваження.*** Якщо випадкові події  мають однакову ймовірність, тобто Р(А1) = Р(А2) = ... = Р(Аn) = Р то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій Р(А) = 1 - qn, де q = 1 - Р.

***Приклад.*** В телестудії три телекамери. Для кожної ймовірність того, що вона включена в даний момент, дорівнює Р = 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент включена хоча б одна телекамера (подія А)

А1 - включена перша телекамера,

А2 - включена друга телекамера,

А3 - включена третя телекамера.

Р(А1) = Р(А2) = Р(А3) = Р = 0,6

; Р(А) = 1 – (0,4)3 = 0,936.

**Наслідки теорем додавання і множення**

**Теорема додавання ймовірностей сумісних подій (загальна)**

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх добутку (сумісної появи), тобто:

Р(А + В) = Р(А) + Р(В) - Р(А . В)

***Зауваження.*** При використанні цієї теореми треба мати на увазі, що події А і В можуть бути як незалежні, так і залежні.

Для незалежних подій:

Р(А + В) = Р(А) + Р(В) - Р(А) . Р(В)

Для залежних подій:

Р(А + В) = Р(А) + Р(В) - Р(А) . Р(В/А);

якщо, А і В несумісні, тобто А . В - неможлива подія, то:

Р(А + В) = Р(А) + Р(В).

***Приклад,*** ймовірність попадання в десятку при стрільбі першим і другим спортсменом відповідно дорівнюють:

Р1 = 0,7; Р2 = 0,8.

Знайти ймовірність попадання в ціль при одному залпі (пострілами двох спортсменів) хоча б одним із спортсменів.

Події: А (попадання 1-го спортсмена), В (попадання 2-го спортсмена) - незалежні.

Подія С - попадання в ціль хоча б одним спортсменом при їх пострілах - сумісна.

Р(С) = Р(А + В) = Р(А + В) - Р(А . В) = Р(А) + Р(В) - Р(А) . Р(В)= = 0,7 + 0,8 - 0,7 . 0,8 = 0,94.

**§ 4. Формула повної ймовірності**

Нехай проводиться експеримент, з яким пов'язана повна група по­па­р­но-­не­су­мі­с­них подій, (позначимо їх через Ні, ), ймовірності яких відомі Р(Ні) до експерименту. Нас цікавить деяка подія А, яка може наступити при умові появи однієї із подій Ні. Для події А відомі умовні ймовірності відносно подій Ні, тобто Р(А/Ні).

Треба знайти ймовірність появи події А.

***Розв'язування.*** Події Ні, Н2, ... , Нn утворюють повну групу подій і їх сума буде достовірною подією. Згідно з умовою подія А може появитися сумісно з якою-небудь подією Ні ,тобто АН1, АН2, ... , АНn - які також будуть несумісні і до них можна застосувати теорему додавання:

.

Одержана формула і називається формулою повної ймовірності.

**Формула Байєса (формула гіпотез)**

Нехай в умовах задачі повної ймовірності в результаті проведеного експерименту стало відомим, що подія А відбулася. Треба знайти умовну ймовірність однієї з подій Ні , тобто умовні ймовірності подій Ні відносно події А, які позначимо: 

***Розв'язування.*** Згідно з теоремою множення



.

Одержана формула називається формулою Байєса.

***За­ува­жен­ня.*** По­дії Ні на­зи­ва­ю­ть­ся зви­чай­но гі­по­те­за­ми, а їх ймо­ві­р­но­с­ті, що ві­до­мі ще до роз­в'яз­ку за­да­чі, Р(Ні) на­зи­ва­ю­ть­ся ***а п­рі­о­р­ни­ми*** ймо­ві­р­но­с­тя­ми (*a priori* - спо­ча­т­ку);

Р(Ні/А) - умовні ймовірності називаються ***а постеріорними*** ймовірностями (*a posteriori* - після того).

Формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез, після того, як стане відомим результат випробування (експерименту), внаслідок якого з'явилася подія А.

***Приклад.***

На склад поступило 1000 підшипників, із них

200 - виготовлені на 1-му заводі,

460 - виготовлені на 2-му заводі,

340 - виготовлені на 3-му заводі.

Ймовірність, що підшипник виявиться нестандартним для:

1-го заводу = 0,03

2-го заводу = 0,02

3-го заводу = 0,01

1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий підшипник виявився нестандартним.
2. Знайти ймовірність того , що він виготовлений 1-м заводом.

***Розв'язування.*** Позначимо через А - подію, що підшипник нестандартний, а через Н1, Н2, Н3 - гіпотези (події), що підшипник, виготовлений відповідно 1-м, 2-м і 3-м заводом. Їх ймовірності дорівнюють

; ; 

3 умови задачі можна визначити, що

, , 

Тоді 1.

2. .

Таким чином, ймовірність події, що підшипник, виготовлений першим заводом після того, як стало відомо, що він нестандартний, змінилась і стала дорівнювати 0,32.